Chapitre II
Propriétés de Baire

2. 1 – Définitions et propriétés de base

Définition 1. 1

Un espace topologique X est dit *de Baire* si toute intersection dénombrable d'ouverts denses de X est encore dense dans X.

Il revient au même de dire que toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide.

Théorème 1.2

Si X est un espace métrique complet, ou si c'est un espace localement compact, X est un espace de Baire.

Démonstration – Nous la donnons tout d'abord dans le cas où X est un espace métrique complet.

Soit $(O_i)_{i=1,\cdots,+\infty}$ une famille dénombrables d'ouverts denses. Il faut montrer que $\cap O_i$ est encore dense. Pour cela, il suffit de vérifier que, pour tout ouvert W de X, l'intersection $(\cap O_i) \cap W$ est non vide. Par hypothèse, $O_1 \cap W$ est non vide. Soit x_1 un point de cette intersection. L'ensemble $O_1 \cap W$ étant ouvert, il existe un nombre $r_1 > 0$ tel que la boule *fermée* $\overline{B(x_1, r_1)}$ soit contenue dans $O_1 \cap W$. Appelons W_1 la boule ouverte $B(x_1, r_1)$. Par hypothèse, W_1 rencontre O_2 et par conséquent, il existe un point x_2 appartenant à l'intersection $W_1 \cap O_2$. De nouveau, on trouve un nombre r_2 strictement positif, que l'on peut supposer inférieur à $r_1/2$ tel que la boule fermée $\overline{B(x_2, r_2)}$ soit contenue dans $W_1 \cap O_2$. Désignons par W_2 la boule ouverte $B(x_2, r_2)$. Poursuivant ce procédé, on construit une suite de boules $B(x_i, r_i)$ telles que :

- chaque rayon r_i est inférieur à la moitié du précédent, de sorte que la suite (r_i) tend vers 0.
- les boules forment une suite décroissante, et pour tout i, $\overline{B(x_i, r_i)} \subset O_1 \cap \cdots \cap O_i \cap W$.

Il résulte de l'emboîtement des boules $B(x_i, r_i)$ et de fait que leur rayon r_i tend vers 0 que la suite de leurs centres est de Cauchy donc convergente vers un point x vu l'hypothèse faite sur X (pour $j \geqslant i$, le point x_j appartient à $B(x_i, r_i)$ et la distance $d(x_i, x_j)$ est donc inférieure à r_i, qui est inférieur à ε pour $i \geqslant i_0$). Par ailleurs, pour tout i, pour tout $j \geqslant i$, $x_j \in \overline{B(x_i, r_i)} \subset O_i \cap W$. La boule fermée étant fermée, elle est stable par passage à la limite et donc $x \in \overline{B(x_i, r_i)} \subset O_i \cap W$. Cette propriété étant vraie pour tout i, le point x appartient bien à l'intersection $\cap O_i \cap W$, qui est donc non vide.

Lorsque l'on remplace l'hypothèse selon laquelle X est un espace métrique complet par le fait que c'est un espace localement compact, il suffit de modifier légèrement la démonstration ci-dessus. Pour cela, on remplace la boule fermée $\overline{B(x_1,r_1)}$ par un voisinage compact V_1 de x_1 contenu dans $W\cap O_1$ (il en existe par hypothèse), et on remplace W_1 par l'intersection de W et de l'intérieur de V_1, qui contient x_1 puisque V_1 est un voisinage de x_1. On pourra conclure si l'on est capable de démontrer que l'intersection $\cap V_i$ est non vide, puisque par construction, cette intersection est contenue dans $W\cap(\cap O_i)$. Cette dernière propriété est claire, dans la mesure où nous avons affaire à une intersection décroissante de compacts non vides, qui est non vide par définition de la compacité. $\square$

On vérifie que les ouverts et les fermés d'un espace de Baire sont encore des espaces de Baire. Il en résulte en particulier, compte tenu du théorème ci-dessus, que $\mathbb{R}$, ses ouverts et ses fermés sont des espaces de Baire.

2. 2 – Exercices

Exercice 2. 1 – Soit $F\subset\mathbb{R}$ un fermé sans point isolé. Montrer que F est indénombrable. (On rappelle qu'un point x d'une partie A d'un espace métrique E est dit *isolé dans* A s'il existe un nombre $r>0$ tel que $B(x,r)\cap A=\emptyset$).

Indication : si, au contraire, $F=\{x_n,\ ;\ n\geqslant 0\}$, aboutir à une contradiction en considérant diverses propriétés des ensembles $O_n=\{x\in F,\ ;\ x\neq x_n\}$.

Exercice 2. 2 – Soit $f:\ \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ telle que

$$(*)\ \ \forall x\in\mathbb{R},\ \exists n\geqslant 0,\ f^{(n)}(x)=0$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est une fonction polynôme.

1 – On définit les ensembles

$$\Omega=\{x\in\mathbb{R},\ f \text{ est polynomiale sur un voisinage de } x\}$$
$$F=\mathbb{R}\backslash\Omega$$
$$F_n=\{x\in F,\ f^{(n)}(x)=0\}$$

Montrer que Ω est ouvert. Si $]u,v[$ est une composante connexe de Ω (c'est-à-dire un intervalle ouvert maximal inclus dans Ω), montrer qu'il existe un polynôme P tel que $f(x)=P(x)$ pour tout $x\in\,]u,v[$.

Indication : soit $x_0\in\,]u,v[$. Soit P tel que $f=P$ sur un voisinage de x_0 et soit

$$I=\{x\in]x_0,v[,\ f=P\text{ sur }[x_0,x]\}$$

Montrer que I est un intervalle non vide et que $\sup I$ ne peut pas appartenir à Ω. Conclure.

2 – Montrer que F est un fermé sans point isolé.

Indication : si f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, polynomiale sur $]\alpha,\beta[$ et sur $]\beta,\gamma[$, vérifier qu'elle l'est aussi sur $]\alpha,\gamma[$.

3 – On raisonne par l'absurde en supposant que F est non vide. Montrer qu'il existe n_0 et un intervalle ouvert I tels que $I\cap F$ soit non vide et inclus dans F_{n_0}. (Utiliser le fait que F est un espace de Baire).

4 – Montrer que, pour tout $n\geqslant n_0$, $I\cap F\subset F_n$.

Indication : raisonner par récurrence, en remarquant que $I\cap F$ est sans point isolé et que, par conséquent, si $x\in I\cap F$

$$f^{(n+1)}(x)=\lim_{y\to x,\,y\in I\cap F}\frac{f^{(n)}(y)-f^{(n)}(x)}{y-x}$$

5 – En utilisant la formule de Taylor, montrer que $f^{(n_0)}=0$ sur toute composante connexe de $I\cap\Omega$. Conclure que $F=\emptyset$.

Indication : soit $]a,b[$ une composante connexe de $I\cap\Omega$. Vérifier que $a\in F$. Montrer que la restriction de f à $[a,b]$ est polynomiale et en conclure que, si $x\in[a,b]$,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n_0-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

6 – En utilisant 1. et 5., montrer le résultat annoncé.

Exercice 2. 3 – Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de prouver que f est continue sur un ensemble dense.

1 – Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $x \in I$. On définit l'*oscillation de* φ *en* x par

$$\omega(\varphi, x) = \lim_{\varepsilon \to 0} [\sup\{\varphi([x-\varepsilon, x+\varepsilon])\} - \inf\{\varphi([x-\varepsilon, x+\varepsilon])\}]$$

Montrer que cette limite existe et peut être interprétée comme borne inférieure d'un certain ensemble.

2 – Montrer que la fonction $x \mapsto \omega(\varphi, x)$ est *semi-continue supérieurement*, c'est-à-dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des éléments $x \in I$ tels que $\omega(\varphi, x) < \varepsilon$ est ouvert.

Vérifier que φ est continue en x si et seulement si $\omega(\varphi, x) = 0$.

3 – Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On définit des ensembles

$$F_{n,p} = \{x \in I,\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon\}$$

et

$$F_n = \bigcup_{p \geqslant 0} F_{n,p}$$

Soit $]u, v[\subset I$. Montrer, en utilisant la propriété de Baire, qu'il existe n_0 tel que $F_{n_0} \cap]u, v[$ soit d'intérieur non vide. En déduire qu'il existe $x_0 \in]u, v[$ tel que $\omega(f, x_0) < 4\varepsilon$.

4 – En appliquant de nouveau la propriété de Baire, la semi-continuité supérieure et 3., montrer que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans I.

Indication : remarquer que la densité de A dans I se traduit par le fait que tout intervalle ouvert de I contient un point de A.

5 – Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que sa dérivée f' est continue sur un ensemble dense.